	Produit Scalaire dans le plan	
	Exercices	3 ème

Énoncés

Exercice 1

Soit φ un cercle de centre O(3, 1) et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4, 3).

Vérifiez que *A* est un point du cercle et déterminer l'équation de la tangente à Γ passant par A.

Exercice 2

EFGH est un rectangle, avec $EH = a$ et $EF = \frac{3}{2}a$; *M* est le milieu de [*FG*] et *K* est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$;*L* est le projeté orthogonal de *K* sur (*EM*).

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{KE}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = \frac{5a^2}{4}$.

3) En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$, en déduire la distance *EL* en fonction de *a*.

4) Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{KEM}$.

Exercice 3

ABC est un triangle tel que *AB* = 7, *BC* = 5 et *CA* = 8. On note *H* le pied de la hauteur issue de *B* et *G* le centre de gravité du triangle.

1) Calculer les angles de ce triangle.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire la longueur *AH*.

3) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur *AG*.

Exercice 4

Construire un triangle isocèle *ABC* tel que *AB* = *AC* = 13 et *BC* = 10. On note *G* son centre de gravité.

1) Calculer les longueurs *AG*, *BG* et *GC*.

2) Montrer que pour tout point *M* du plan on a $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 194$

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.

Exercice 5

1) Soient les points $A(1\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = 10$. Représenter cet ensemble.

2) Soit $A(5\ ;\ 3)$ et $B(2\ ;\ 4)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -2$. Tracez cet ensemble.

3) Soient A et B deux points du plan tels que $AB = a$. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = a^2$.

Corrections

Exercice 1

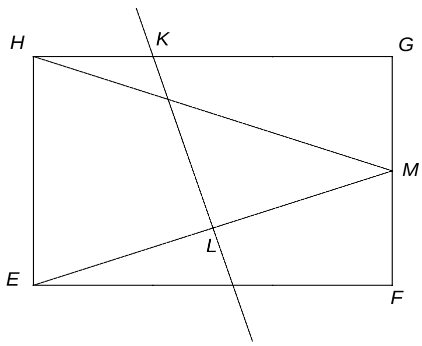
L'équation de φ est $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Remplaçons x et y par les coordonnées de A : $(4-3)^2 + (3-1)^2 = 1+4 = 5$. Donc $A \in \varphi$

La tangente à φ passant par A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO} = 0$,

soit en coordonnées : $\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 25 = 0$.

Exercice 2



1) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF} = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2$

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{KE} = -\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EH} = -a^2$.

2) $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = \left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK}\right).\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM}\right) = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{FM} = 0 + \frac{1}{2}a.\frac{3}{2}a + a.\frac{1}{2}a + 0 = \frac{5a^2}{4}$.

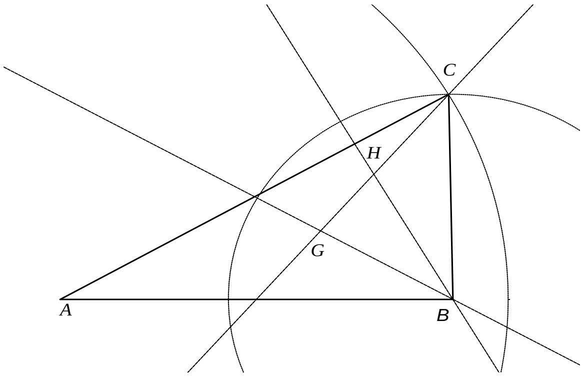
3) Par projection sur (EM) : $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EL}.\overrightarrow{EM} = EL.\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{10}}{2}.EL$

donc $EL = \frac{5a^2}{4}.\frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

4) $EK = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ (avec Pythagore),

$$\cos\left(\widehat{KEM}\right) = \frac{\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}}{EK.EM} = \frac{\frac{5a^2}{4}}{a\frac{\sqrt{5}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{KEM} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3



1) on a

$$\underline{\left\|\underbrace{\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{AB}}\right\|^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos\hat{C}}$$

$\Rightarrow 7^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} \approx 60°$. De même on trouve

$\cos\widehat{A} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2.8.7} = \frac{11}{14} \Rightarrow \widehat{A} \approx 31°$ et $\hat{B} \approx 89°$.

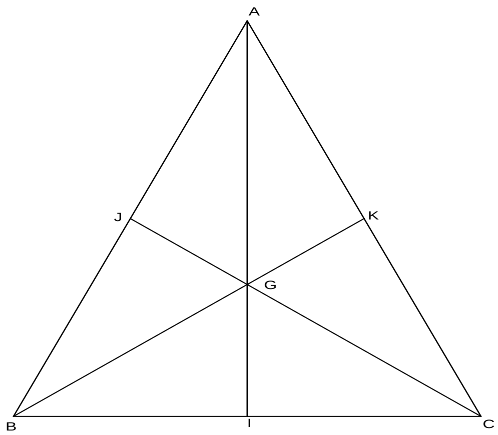
2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 7.8.\frac{11}{14} = 44$, par ailleurs $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AC \Rightarrow AH = \frac{44}{8} = 5,5$.

3) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On a alors

$$AG^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + 2.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{9}.49 + \frac{2}{9}.44 + \frac{1}{9}.64 = \frac{201}{9}.$$

D'où $AG = \frac{\sqrt{201}}{3}$.

Exercice 4



AB = AC = 13 et BC = 10, G le centre de gravité.

1) Avec Pythagore: $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AI = 12 \Rightarrow AG = \frac{2}{3}.12 = 8$;

$$BG^2 = BI^2 + IG^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow BG = CG = \sqrt{41}.$$

2) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\,\underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

3) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 64 + 41 + 41 = 3MG^2 + 146$ donc l'ensemble de points cherché est l'ensemble des points M tels que $3MG^2 + 146 = 194 \Leftrightarrow MG^2 = 16 \Leftrightarrow MG = 4$, soit le cercle de centre G, de rayon 4.

4) $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MA^2 - MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - AB^2 - MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} - AC^2 = -2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 338$

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{AI}) = -169 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \frac{169}{2}$.

On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AI})$ où le point M a pour abscisse $\underline{x}$ tel que $x = \frac{169}{2}$; c'est la droite perpendiculaire à (AI) passant par ce point.

Exercice 5

1) A(1 ; 1), B(1 ; 0); $MA^2 + MB^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-x)^2 + (-y)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + 3$ =10. On cherche donc les points tels que $x^2 + y^2 - 2x - y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$. C'est le cercle de centre C (1 ; 1/2) et de rayon $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

2) $A(5\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 4)$. $MA^2-MB^2=(5-x)^2+(3-y)^2-(2-x)^2-(4-y)^2=14-6x+2y$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $14-6x+2y=-2 \Leftrightarrow 3x-y-8=0$.

3) $AB = a$. $\vec{MA}.\vec{MB}=\begin{pmatrix} x_A-x \\ y_A-y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B-x \\ y_B-y \end{pmatrix}=x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B$. Prenons le centre du repère en I, milieu de $[AB]$, les coordonnées $A(-p\ ;\ 0)$ et $B(p\ ;\ 0)$ où $p = a/2$; on a alors $x^2+y^2=p^2+a^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5}{4}a^2$, soit le cercle de centre I et de rayon $a\frac{\sqrt{5}}{2}$.